# REPASO DE TEORIA DE CONJUNTOS.

Humberto Carrillo Calvet

August 12, 2010

Por *conjunto*, entendemos una colección de distintos objetos entendidos por una unidad. Le llamamos *elementos* del conjunto a los objetos que corresponden la colección.

En lo sucesivo manejamos letras mayúsculas para denotar conjuntos y minúsculas para diferenciar a los elementos. Si $X$ es un conjunto, puede decir que es un elemento de él escribimos:

$$x \in X$$

y escribimos

$$x \notin X$$

para afirmar que $x$ no es elemento de $X$ .

Por ejemplo, si le llamamos $X$ al conjunto de los números reales y $Y$ al conjunto de los números del uno al mil, entonces:

$a \in X,\ z \notin X,\ 3 \notin Y$ y $2000 \notin Y$

Para que un conjunto esté definido es necesario que, (¿Qué dice aquí?) ande en un objetivo cualquiera, se puede averiguar si es elemento del conjunto o no. Una manera de definir un conjunto es usando una lista de sus elementos, otra consiste en determinar la parte de alguna propiedad universal que defina a sus elementos; para esto se usa una notación convencional que ilustraremos a continuación utilizando los conjuntos $X$ y $Y$ de los ejemplos anteriores.

$$X = \{a, e, i, o, u\}$$

Que se lee como: $X$ es el conjunto cuyos elementos son la $a$, la $e$, la $i$, la $o$, y la $u$

$$Y = \{y \text{ |y es un número del 1 al 1000}\}$$

Se lee así: $Y$ es el conjunto de los elementos $y$ tales que $y$ es un numero del uno a el mil.

Si se quiere ser más preciso y definimos a $Z$ al conjunto de los números enteros, escribiríamos:

$$Y = \{y \in Z \mid 1 \leq y \preceq 1000\}$$

Que se lee como: $Y$ es el conjunto de los números enteros $y$ tales que $y$ es mayor o igual que uno y menor o igual que mil.

OTROS EJEMPLOS:

i) $X = \{x \in \mid x^2 = 1\}$ tiene como elementos al 1 y -1.

ii) $A = \{$Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, Plutón$\}$ es el conjunto de planetas del sistema solar.

iii) $C = \{x, y \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es un círculo de radio uno en centro en el punto $(0,0)$ del plano.

iv) $X = \{y \mid (y^2 - 1)(y - 2) = 0\}$ tiene como elementos al número 1, al $-1$ y al 2.

SUBCONJUNTOS.

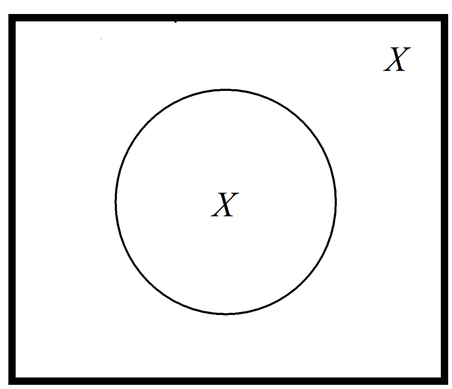
Decimos que un conjunto $X$ es un *subconjunto* del conjunto $Y$ cuando y solo cuando todo elemento de $X$ es un elemento de $Y$. Para indicar este hecho escribimos

$$X \subset Y.$$

Este es el caso se dice también que $X$ está contenido en $Y$, o que $Y$ contiene a $X$.

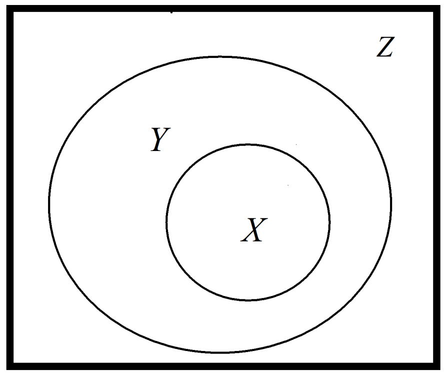
Evidentemente todo conjunto de sí mismo. Cuando $X \subset Y$ y $X \neq Y$ se dice que $X$ es un *subconjunto propio* de $Y$ y se denota por $X \underset{\neq}{\subset} Y$.

También es claro que si $X \subset Y$ y $Y \subset X$ entonces $X = Y$ y que si $X \subset Y$ y $Y \subset Z$ entonces $X \subset Z$.




EL VACIO

Conviene pensar que existe un objeto ó conjunto que no tiene elementos al que llamamos el *conjunto vacío*, denotaremos por la letra del alfabeto griego $\Phi$ y



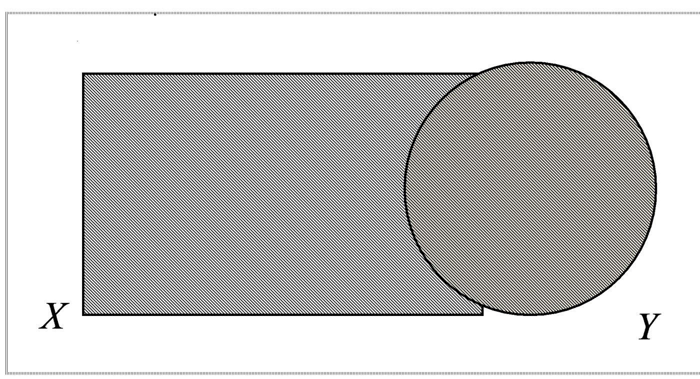

la leeremos como $fi$. Resulta entonces que el vacío es subconjunto de cualquier conjunto, es decir, si $X$ es un conjunto cualquiera es cierto que $\Phi \subset X$ pues en caso contrario existirá algún $x \in \Phi$ tal que $x \notin X$, pero esto es contradictorio ya que $\Phi$ no tiene elementos.

OPERACIONES CON CONJUNTOS.

1.- LA UNIÓN. Dados los conjuntos $X$ y $Y$, se construye un nuevo conjunto que llamaremos la *unión* de $X$ con $Y$, que denotamos por $X \cup Y$ y consta de todos los objetos que son elementos de uno o de otro, es decir:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ ó } x \in Y\}$$

Podemos hacer la interpretación geométrica siguiente:

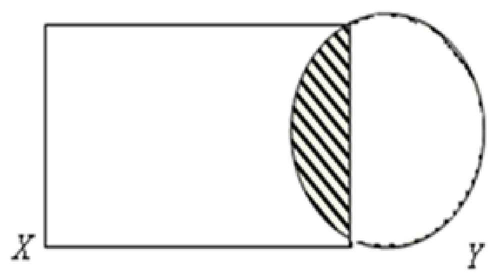



El área sombreada representa el conjunto $X \cup Y$.
Es concecuencia inmediata de la definición que:

i) (¿Qué dice aquí?) $X \cup Y$ y $Y \cup Z$
ii) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

2.- LA INTERSECCIÓN. Dados dos conjuntos $X$ y $Y$ le llamamos *intersección* de $X$ con $Y$, y denotamos por $X \cap Y$, al conjunto de todos los elementos que $X$ y $Y$ tienen en común, esto es

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ y } x \in Y\}$$




Cuando los conjuntos $X$ y $Y$ no tienen ningun elemento en comun decimos que no se intersectan o que son ajenos.

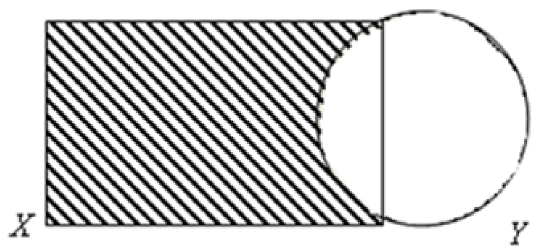
Es facil mostrar que:
i) $X \cap Y = Y \cap X$
ii) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
iii) Si $X \subset Y$ entonces $X \cap Y = X$

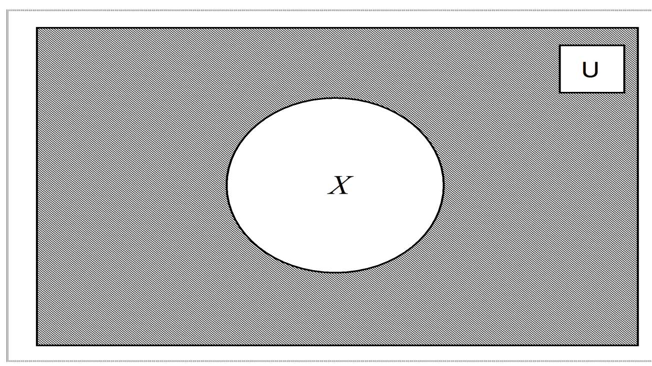
3.- LA DIFERENCIA. Dados $X$ y $Y$ se define al conjunto $X - Y$ como el subconjunto máximo de $X$ que no se intersecta con $Y$, es decir:

$$X - Y = \{u \in X \mid u \notin Y\}.$$

CONJUNTOS UNIVERSALES

En la teoría de conjuntos es usual definir un conjunto y restringirse a trabajar con subconjuntos de éste, a tal conjunto se le llama *Universo* ó *Conjunto Universal*. Este Universo no es un Universo absoluto en el sentido de que contenga a cuanto conjunto podemos imaginar, sino que es solamente un conjunto "suficientemente grande" para poder considerar en él, como subconjuntos, a todos los conjuntos que interesen al trabajo que se esté haciendo. Para cada problema que se esté trabajando se define un Universo adecuado. Por ejemplo si se trata de un problema de lingüística un Universo adecuado podría ser el conjunto de




letras del alfabeto; si se trata de un problema de Cálculo, el Universo adecuado podría ser el conjunto de los números reales.

COMPLEMENTOS

Si le llamamos $U$ a el conjunto Universal con que estamos trabajando, se define $X^c$, el Complemento de el conjunto $X$, como el conjunto de todos los elementos de $U$ que no pertenece a $X$, esto es:

$$X^c = U - X$$

En consecuencia se tiene que $U^c = \phi$ ,$\phi^c = U$ y que si $X \subset Y$ entonces $Y^c \subset X^c$.

PRODUCTO CARTESIANO.

El concepto de producto cartesiano de dos conjuntos es una generalización del concepto de plano cartesiano. En Geometría Analítica se consideran los puntos del plano como parejas ordenadas de números reales; así el conjunto de los puntos del plano es un conjunto de parejas $(x, y)$ donde tanto $x$ como $y$ son números reales, Si le llamamos $P$ a el plano cartesiano y $\mathbb{R}$ a el conjunto de los números reales entonces:

$$P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Decimos que el plano es un conjunto de parejas ordenadas porque el orden en que aparecen los componentes de la pareja es importante yq que distinguimos $(x, y)$ de $(y, x)$ como puntos diferentes del plano. Frecuentemente a el plano cartesiano se le llama $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^2$

De manera análoga, dados los conjuntos $X$ y $Y$ se define $X \times Y$, el producto cartesiano de $X$ en $Y$, el producto cartesiano, como el conjunto de todas las parejas ordenadas tales que el primer elemento de la pareja es un elemento de $X$ y el segundo es el elemento de $Y$ esto es:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, \quad y \in Y\}$$

Por ejemplo, $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ es un subconjunto del plano que tiene como elementos los puntos del plano cuya primera coordenada es un número real cualquiera pero la segunda es un número entero, ocurre pues que $(\frac{1}{2}, 5) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ mientras que $(5, \frac{1}{2}) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

CONJUNTO POTENCIA.

Los objetos que componen a un conjunto pueden ser un contexto, es decir, los objetos perceptibles del mundo físico como millas, gotas de agua, personas, etc. u objetos abstractos imperceptibles sensorialmente, de los cuales se tiene solamente el conocimiento a nivel mental como los números, las notas, los círculos o los nuevos pronósticos que hicimos ayer. También un conjunto puede tener elementos que sean conjuntos, es el cero que puede siempre darse con un conjunto de elementos son de la misma naturaleza concreta y por lo tanto pueden pensarse como unión de partes. Por ejemplo, el conjunto de las palabras de esta página puede entenderse como un conjunto de conjuntos de letras.

Algo importante que hay que tener en cuenta cuando se trabaja un conjunto $X$ que tiene algun conjunto $Y$ como elemento es que los elementos de $Y$ no son necesariamente elementos de $X$. Por ejemplo si

$$X = \{a, \{a, b\}\} \text{ entonces } a \in X, \{a, b\} \in X \text{ pero } b \notin X.$$

Dado un conjunto $X$, al conjunto de todos los subconjuntos de $X$ le llamaremos *conjunto potencia* de $X$ y lo denotaremos por $PX$.

Obsérvese que los elementos de $X$ no son elementos de $PX$.

CARDINAL DE UN CONJUNTO.

Hay conjuntos que tienen infinitos elementos, por ejemplo el conjunto de los números enteros. Si un conjunto tienen infinitos elementos decimos que es *infinito*, y en caso contrario, que es *finito*.

Si el conjunto $X$ es finito definimos $\# X$, "el condicional de $X$", como el número de elementos del conjunto $X$.

Es fácil dar un argumento para concluir que siendo $X$ finito entonces $\#X < \#PX$

Aunque el propósito de estas notas es dar de manera intuitiva una introducción a la teoría de los conjuntos, conviene comentar algunos problemas más avanzados que aparecen en la teoría.

Lo primero que hay que observar es que desde un punto de vista estricto no hemos dado una definición de conjunto, pues hemos dicho lo que entendemos por conjunto a partir del concepto de colección y de unidad y éstos no fueron definidos previamente. Lo que hemos hecho pues, es dar una definición de conjunto al estilo de los que aparecen en los diccionarios donde, muchos creen, un concepto se explica en términos de sinónimos de manera viciosa. Por otra parte, puede parecer una pedantería exigir una definición precisa de conjunto ya que el concepto es tan sencillo, intuitivo y fácil de comprender. Sin embargo, el ejemplo que aparece a continuación nos hará observar que es importante reflexionar más sobre nuestro concepto de conjunto, ya que el aceptar que cualquier colección es un conjunto puede llevarnos a contradicciones.

ANTINOMIA DE RUSSELL. Anteriormente vimos que los elementos de un conjunto pueden ser conjuntos, en particular un conjunto puede ser elemento de si mismo como ocurre con los conjuntos siguientes:

i) El conjunto de todos los conjuntos que están definidas en español,

ii) El conjunto de todos los conjuntos.

Lógicamente, dado un conjunto cualquiera o tiene esta propiedad o no la tiene. Si la tiene diremos que el conjunto es *anormal*; en caso contrario que es *normal.*

Consideramos ahora el conjunto de todos los conjuntos normales y llamémosle $N$.

¿Será $N$ un conjunto normal o anormal?

Bueno, si $N$ fuera anormal entonces $N \in N$ y como los elementos de $N$ son conjuntos normales entonces $N$ será normal. Si suponemos ahora que $N$ fuerá normal, entonces $N$ consta de todos los conjuntos normales entonces $N$ será elemento de sí mismo y en concecuencia será anormal. Estas contradicciones muestran que es imposible lógicamente que $N$ sea normal o anormal mientras que anteriormente habríamos dicho que todo conjunto tenía que ser normal o anormal.

Este interesante ejemplo que encontró Berthand Russell constituye una de las paradojas que hicieron que las matemáticas cuestionaran el ingenuo concepto de conjunto, y que algunos de ellos buscaran presentaciones axiomáticas de la teoría, con el propósito de restringir el concepto de conjunto adecuadamente para evitar contradicciones. Se puede demostrar tambien que suponer la existencia de un conjunto $U$, que contenga como subconjunto a todo conjunto, un *universo absoluto*, nos llevaría a contradicciones. Esto se debe fundamentalmente al hecho de que este conjunto tendría la propiedad de contener a su conjunto potencia.

EJERCICIOS:

1. De dos ejemplos de conjuntos cuyos elementos sean también conjuntos.
2. Diga con palabras el significado de

$$i)\ X=\{a,b\} \quad ii) Y=\{\{a,b\}\}$$

3. Siendo $X$ y $Y$ los del problema anterior, indica cuáles de las afirmaciones siguentes son ciertas:

$$\begin{array}{rr} i)\ a\in X & iii)\ a\in Y \\ ii)\ \{a\}\subset X & iv)\ \{a,b\}\subset Y \end{array}$$

4. Sea $A=\{1\},\ B=\{\{1\}\}$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son ciertas?

$$\begin{array}{rr} i)\ 1\in A & iv)\ 1\in B \\ ii)\ \{1\}\in A & v)\ \{1\}\in Y \\ iii)\ \{1\}\subset A & vii)\ \{1\}\subset B \end{array}$$

   ¿Será $A$ un subconjunto de $B$?
5. ¿Cuántos elementos tiene $\{\varnothing\}$? ¿Será cierto que $\{\varnothing\}=\varnothing$?
6. - Sea $X=\{\{a,b\},c,d\}$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\begin{array}{rrr} i)\ c\in X & iv)\ \{a,b\}\subset X & vii)\ \{\{a,b\},d\}\subset X \\ ii)\ \{d\}\in X & v)\ d\in X, & \\ iii)\ \{a,b,c\}\subset X & vi)\ \{ab\}\subset X & \end{array}$$

7. Diga cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas para $X,Y,$y $Z$ tres conjuntos cualesquiera. En caso de que sea falsa la afirmación dibuje un ejemplo:

$$\begin{array}{rrr} i)\ X\subset X\cup Y & vi)\ X\cap\varnothing=\varnothing & xi)\ (X\wedge Y)^C=X^C\cap Y^C \\ ii)\ X\cap Y\subset X\cup Y & vii)\ X\cap X^C\subset\varnothing & xii)\ X\subset Y\Longleftrightarrow X^C\subset Y^C \\ iii)\ X\cup Y\ \subset\ \ X\cap Y & viii)\ (X\cup Y)^C=X^C\cup Y^C & xiii)\ X\subset Y\Longleftrightarrow Y^C\subset X^C \\ iv)\ X\cup Y=Y & ix)\ (X\cup Y)^C=X^C\cap Y^C & xiv)\ X\subset Y\Longleftrightarrow\ X\cup Y=Y \\ v)\ (X^C)^C\ =X & x)\ (X\cap Y)^C=X^C\cap Y^C & xv)\ X-Y=X\cap Y^C \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} xvi)\ \ X\subset\varnothing\Longrightarrow X=\varnothing & xxi)\ \ Y\subset X\Longleftrightarrow(X\cup Y)-(X\cap Y)=X-Y \\ xvii)\ X-Y=X-(X\cap Y) & xxii)\ \ X\subset Y^C\Longleftrightarrow X\cap Y=\varnothing\Longleftrightarrow Y\subset X^C \\ xviii)\ X\nsubseteq Y\Longleftrightarrow X\cap Y^C\neq\varnothing & xxiii)\ \ X\cap Y=X\wedge Z\Longleftrightarrow Y=Z \\ xix)\ \ X\cup Y=X\Longleftrightarrow X\subset Y & xxiv)\ \ X\subset Y\Longleftrightarrow PX\subset PY \\ xx)\ X\subset Y\Longleftrightarrow X\cap Z\subset Y\cap Z & xxv)\ X\cup Y=X\cup Z\Longleftrightarrow Y=Z \end{array}$$

8. Demuestre que si $X$ es finito entonces $\#PX = 2^{\#X}$

9. Si definimos $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$,¿Qué se debe de pedir a los conjuntos $X$ y $Y$ para que $X \triangle Y = X$?

10. Sea $A = \{a, b, c\}$ , $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{2, 4, 5\}$,Encuentre

$$i)\ A \times B \quad ii)\ A \times (B \cup C) \quad iii)\ (A \times B) \cup (A \times C)$$

11. ¿Qué deben cumplir los conjuntos $X$ y $Y$ para que $X \times Y = Y \times X$ ?